Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 1

Przestrzenie Banacha

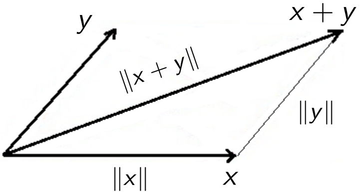
math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Przestrzenie unormowane

Co to jest przestrzeń wektorowa (liniowa)?

Def. Przestrzenią unormowaną nazywamy przestrzeń liniową X nad ciałem $\mathbb{F} := \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wyposażoną w **normę**, czyli funkcję $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ taką, że dla dowolnych $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$:

- N1 $\|x\| = 0 \iff x = 0,$ (*niezdegenerowanie*)
- N2 $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$ (*dodatnia jednorodność*)
- N3 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$ (*nierówność trójkąta*)



(*odwrotna nierówność trójkąta*)

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$$

Norma zadaje **metrykę** wzorem $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in X$.
Zatem przestrzeń unormowana jest też **przestrzenią topologiczną**.

Zbiory otwarte w X są sumami kul otwartych, gdzie **kulą otwartą** o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$K(x,r) := \{y \in X : \|x-y\| < r\}.$$

Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ jest **zbieżny** do $x \in X \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Piszemy wtedy $x_n \to x$, $x_n \xrightarrow{X} x$ lub $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Stw. (ciągłość struktury liniowej) W przestrzeni unormowanej mnożenie przez skalar, dodawanie wektorów i norma są funkcjami ciągłymi.

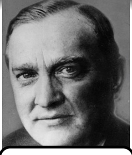
Dowód: Niech $\lambda_n \to \lambda$, $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$, czyli $|\lambda_n - \lambda| \to 0$, $\|x_n - x\| \to 0$ oraz $\|y_n - y\| \to 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_m - \lambda x\| &\overset{N3}{\leqslant} \|\lambda_n x_m - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| \\ &\overset{N2}{=} |\lambda_n| \cdot \|x_m - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| \longrightarrow 0, \text{ przy } n, m \to \infty.\end{aligned}$$

Zatem $\lambda_n x_m \to \lambda x$, czyli mnożenie przez skalar $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ jest ciągłe. Ciągłość dodawania wektorów $+ : X \times X \to X$ wynika z

$$\|(x_n + y_m) - (x+y)\| \overset{N3}{\leqslant} \|x_n - x\| + \|y_m - y\| \longrightarrow 0, \quad \text{przy } n, m \to \infty$$

Ciągłość normy wynika z „odwrotnej nierówności trójkąta”:
$\big| \|x_n\| - \|x\| \big| \leqslant \|x_n - x\| \to 0$, skąd $\|x_n\| \to \|x\|$. $\blacksquare$


Stefan Banach

Def. Przestrzenią Banacha nazywamy przestrzeń unormowaną zupełną, tzn. przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$, gdzie dla każdego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$

$$\underbrace{\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0}_{\text{ciąg Cauchy}} \implies \underbrace{\exists_{x_0 \in X} \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0.}_{\text{ciąg zbieżny}}$$

Uwaga. Implikacja przeciwna zawsze zachodzi.

Prz. Przestrzeń $\mathbb{R}$ z normą $\|x\| = |x|$ jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$. Podobnie $\mathbb{C}$ z normą $\|x\| = |x|$ jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{C}$.

Prz. Przestrzeń $\mathbb{F}^n$ z normą $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2}$ jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (*przestrzeń euklidesowa*)

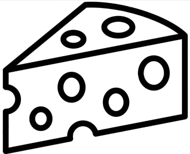
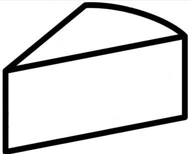
Stw. Jeśli podprzestrzeń liniowa $Y \subseteq X$ przestrzeni unormowanej X jest zupełna, to Y jest domknięta w X. Jeśli X jest zupełna, to

$$Y \text{ jest zupełna} \iff Y \text{ jest domknięta.}$$

(przypomnijmy, że $\overline{Y} = Y \cup Y^d$, gdzie Y^d punkty skupienia Y)

Dowód: „$\Longrightarrow$". Załóżmy, że Y zupełna. Niech $y \in Y^d$, czyli istnieje ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ zbieżny do $y \in X$. Wtedy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy w Y. Z zupełności Y, ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę w Y. Czyli $y \in Y$. Z dowolności $y \in Y^d$ mamy $Y^d \subseteq Y$. Stąd $Y = \overline{Y}$ domknięta.

„$\Longleftarrow$". Niech X przestrzeń zupełna, a $Y \subseteq X$ domknięty. Niech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ ciąg Cauchy. Z zupełności X, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w X. Czyli istnieje $y \in X$ taki, że $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Skoro $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ oraz $Y = \overline{Y}$, to $y \in Y$. Zatem $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w Y. Czyli Y przestrzeń zupełna. ■

$Y =$  $\Longrightarrow$ $\overline{Y} =$ 

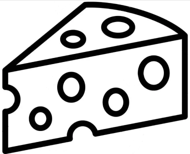
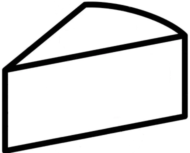
Stw. Jeśli podprzestrzeń Y przestrzeni unormowanej X jest przestrzenią Banacha, to Y jest domknięta w X. Jeśli X jest przestrzenią Banacha

$$Y \text{ jest } \textbf{przestrzenią Banacha} \iff Y \text{ jest domknięta.}$$

(przypomnijmy, że $\overline{Y} = Y \cup Y^d$, gdzie Y^d punkty skupienia Y)

Dowód: „$\Longrightarrow$". Załóżmy, że Y zupełna. Niech $y \in Y^d$, czyli istnieje ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ zbieżny do $y \in X$. Wtedy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest Cauchy w Y. Z zupełności Y, ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę w Y. Czyli $y \in Y$. Z dowolności $y \in Y^d$ mamy $Y^d \subseteq Y$. Stąd $Y = \overline{Y}$ domknięta.

„$\Longleftarrow$". Niech X przestrzeń zupełna, a $Y \subseteq X$ domknięty. Niech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ ciąg Cauchy. Z zupełności X, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w X. Czyli istnieje $y \in X$ taki, że $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Skoro $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ oraz $Y = \overline{Y}$, to $y \in Y$. Zatem $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w Y. Czyli Y przestrzeń zupełna. ■

$Y =$  $\Longrightarrow$ $\overline{Y} =$ 

Uw. Każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić do przestrzeni Banacha (w zasadzie w sposób jednoznaczny)

Twierdzenie (Uzupełnienie przestrzeni unormowanych)

Dla dowolnej przestrzeni unormowanej Y istnieją

1. przestrzeń Banacha X (**uzupełnienie** przestrzeni Y)
2. liniowa izometria $\Psi : Y \to X$ taka, że $\overline{\Psi(Y)} = X$.

Czyli Y zanurza się w X jako gęsta podprzestrzeń. Ponadto, takie X jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do kanonicznego izometrycznego izomorfizmu. Pisze się często $X = \overline{Y}$.

„Szkic Dowodu”: Elementy X definiujemy jako klasy abstrakcji ciągów Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ względem relacji:

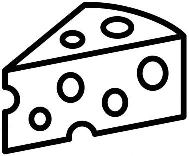
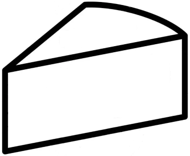
$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \overset{def}{\iff} \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Klasę równoważności oznaczamy $[\{x_n\}]$ i kładziemy

$$[\{x_n\}] + [\{y_n\}] := [\{x_n + y_n\}], \qquad \lambda[\{x_n\}] := [\{\lambda x_n\}],$$
$$\|[\{x_n\}]\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \qquad \Psi(y) = [\{y, y, y, \ldots\}]$$

Wn. Przestrzeń unormowana Y jest zupełna (jest przestrzenią Banacha) $\iff$ jej obraz $\Psi(Y)$ przy dowolnej liniowej izometrii $\Psi : Y \to X$ w przestrzeń unormowaną X jest domknięty w X.

„Zupełność" = „domkniętość w każdej nadprzestrzeni"

$Y =$  vs $\overline{Y} =$ 

Dowód: Zauważmy, że dla dowolnej liniowej izometrii $\Psi : Y \to X$ przestrzeń Y jest zupełna $\iff$ przestrzeń $\Psi(Y)$ jest zupełna. Jeśli to zachodzi, to zbiór $\Psi(Y)$ jest domknięty Y na mocy **Stw**. Na odwrót, na mocy **Twierdzenia** istnieje izometria $\Psi : Y \to X$ w przestrzeń zupełną X. Zatem jeżeli $\Psi(Y)$ jest domknięta w X, to na mocy **Stw** przestrzeń $\Psi(Y) \cong Y$ jest zupełna.

Def. Podprzestrzeń Banacha przestrzeni Banacha $\equiv$ domknięta podprzestrzeń liniowa.

Lem. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ będzie ciągiem Cauchy.

1. Jeżeli pewien podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x,to ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x.
2. Dla każdego $q \in (0, 1)$ istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leqslant q^k$ dla każdego $l \geqslant k$.

Dowód: Proste 

Def. Dla ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ w przestrzeni unormowanej X powiemy, że **szereg** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ **jest zbieżny**, jeżeli ciąg $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{N} x_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ jest zbieżny i wtedy **sumą szeregu** nazywamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ jest **absolutnie zbieżny** jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Stw. Przestrzeń unormowana X jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg absolutnie zbieżny jest zbieżny w X.

Dowód: Niech $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Wtedy dla $M \geqslant N \geqslant 1$ mamy

$$\|\sum_{n=1}^{M} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n\| = \|\sum_{n=N+1}^{M} x_n\| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| \longrightarrow 0, \quad \text{przy } N, M \to \infty,$$

Zatem $\left\{ \sum_{n=1}^{N} x_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ ciąg Cauchy, więc zbieżny jeśli X zupełna.

Załóżmy teraz, że każdy szereg w X, który jest absolutnie zbieżny jest zbieżny. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ dowolny ciąg Cauchy. Wybierzmy podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leqslant (1/2)^k$ dla $l \geqslant k$ (korzystając z **Lem**). Połóżmy $y_1 := x_{n_1}$ oraz $y_{k+1} := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ dla $k \geqslant 1$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leqslant \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k = \|x_{n_1}\| + 1 < \infty$$

skąd $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ zbieżny. Ale $\sum_{k=1}^{N} y_k = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{N} x_{n_{k+1}} - x_{n_k} = x_{n_N}$, czyli podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Zatem $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny (**Lem**) ∎